

---

 APROXIMAREA PRIN SERIE TAYLOR A UNEI FUNCTII POLINOMIALE
 

---

```

clear all

% Considerati functia f(x) polinomiala definita pe intervalul
[0;1]:

x=0:0.01:1;
m=length(x);
f=-0.1*x.^4-0.15*x.^3-0.5*x.^2-0.25*x+1.2;

% Aproximarea Taylor de ordinul '0':

f0=f(1)*ones(size(x));

% Aproximarea Taylor de ordinul '1':

f1=1.2-0.25*(x-0);

% Aproximarea Taylor de ordinul '2':

f2=f1-0.5*(x-0).^2;

% Aproximarea Taylor de ordinul '3':

f3=f2-0.15*(x-0).^3;

% Aproximarea Taylor de ordinul '4':

f4=f3-0.10*(x-0).^4;

% Se reprezinta grafic funtia exacta si cele 5 aproximatii
plot(x,f,'r*',x,f0,'yo',x,f1,'bo',x,f2,'mo',x,f3,'co',x,f4,'go')
axis([-0.1 1.1 0 1.5])
grid

% Calculeaza eroarea functiei in x=1, asociata cu fiecare
aproximare:
eroarea_absoluta=f(m)-[f0(m) f1(m) f2(m) f3(m) f4(m)]

```

---

 EFECTUL NELINIARITATILOR ASUPRA APROXIMARII TAYLOR
 

---

```

clear all
clf

% Sa se aproximeze functia f(x)=x^m cu seria Taylor de ordinul 1,
% pe intervalul [1; 2]:

x=1:0.05:2;
l=length(x);

```

intoarce pagina...

### Laborator 3

... continuare

```
% Se considera m = 1, 2, 3 sau 4 si pasul h=2-1=1.
m=1;
f1=x.^m; % functia exacta
fal=f1(1)+m*1^(m-1)*(x-1); % functia aproximata in x=2

figure(1)
plot(x,f1,'r',x,fal,'ro')
xlabel('x')
ylabel('f(x)')
grid
text(1.8,1.5,'m=1')
hold on

%-----
m=2;
f2=x.^m;
fa2=f2(1)+m*1^(m-1)*(x-1);
plot(x,f2,'g',x,fa2,'go')
text(1.9,3.5,'m=2')
%-----
m=3;
f3=x.^m;
fa3=f3(1)+m*1^(m-1)*(x-1);
plot(x,f3,'b',x,fa3,'bo')
text(1.8,5.5,'m=3')
%-----
m=4;
f4=x.^m;
fa4=f4(1)+m*1^(m-1)*(x-1);
plot(x,f4,'c',x,fa4,'co')
text(1.7,7.5,'m=4')
% Calculeaza eroarea asociata in fiecare caz cu calculul in x=2
%=====
eroarea_absoluta=[f1(1)-fal(1) f2(1)-fa2(1) f3(1)-fa3(1) f4(1)-fa4(1)]

% Calculeaza eroarea asociata cu modificarea lui h, pt. m=4:
%=====
h=1:-0.1:0;
R=6*h.^2+4*h.^3+h.^4;

figure(2)
plot(h,R,'*')
xlabel('h')
ylabel('eroarea absoluta')
grid
```

### Application 1.

Pour approximer par séries de Taylor de l'ordre  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  la fonction polynomiale  $f(x) = -0,1x^4 - 0,15x^3 - 0,5x^2 - 0,25x + 1,2$  définie sur l'intervalle  $[0,1]$ . Représenter graphiquement la fonction exacte et les cinq approximations et calculer les erreurs qui leur sont associées.

*Solution:*

Si l'étape est considérée  $h = 1$ , elle part de la valeur  $f(0) = 1,2$  et applique l'approximation de série finie de Taylor. Les résultats (Fig.) indiquent que la fonction commence à  $f(0) = 1,2$  puis courbe vers le bas jusqu'à  $f(1) = 0,2$ . Ainsi, la vraie valeur que nous essayons de prédire est 0,2.

The Taylor series approximation with  $n$ . Avant, les dérivées nécessaires de la fonction dans  $x = 0$  seront calculées. L'erreur absolue de l'approximation est  $e_n = f(0) - \tilde{f}_n(0)$

$$\tilde{f}_n(1) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}h^n$$

Ainsi,

$$n=0: \tilde{f}_0(1) = f(0) = 1,2, e_0 = 0,2 - 1,2 = -1$$

$$n=1: \tilde{f}_1(1) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}1 = 0,95, e_1 = 0,2 - 0,95 = -0,75$$

$$f'(0) = -0,1 \cdot 4x^3 - 0,15 \cdot 3x^2 - 0,5 \cdot 2x - 0,25 = -0,25$$

Il en résulte une réduction de l'erreur de troncature

...

Commenter l'évolution des erreurs  $e_n$ .

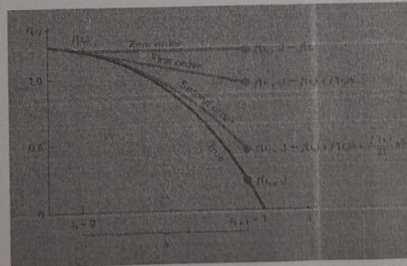


Fig. L'approximation de  $f(x) = -0,1x^4 - 0,15x^3 - 0,5x^2 - 0,25x + 1,2$  à  $x = 1$  par ordre zéro, premier ordre et de deuxième ordre de la série Taylor.

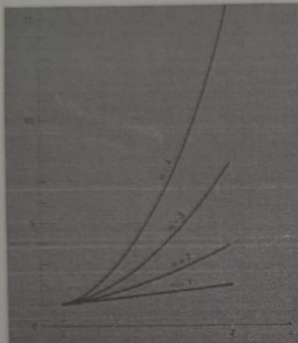
En général, on peut généralement supposer que l'erreur de troncature est diminuée par l'addition des termes de la série Taylor. Dans de nombreux cas, si  $h$  est suffisamment petit, le premier et les termes d'ordre inférieur représentent généralement un pourcentage disproportionnellement élevé de l'erreur. Donc, seuls quelques termes sont nécessaires pour obtenir une estimation adéquate.

### Application 2. L'effet de la non-linéarité et de la taille des pas sur l'approximation de la série Taylor

Pour approximer la fonction  $f(x) = x^m$  avec la série de Taylor de premier ordre sur l'intervalle  $[1, 2]$ . Considérons  $m = 1, 2, 3$  ou  $4$  et l'étape  $h = 1$ .

*Solution:*

La figure est un tracé de la fonction  $f(x) = x^m$  pour  $m = 1, 2, 3$  et  $4$  sur la plage de  $x = 1$  à  $2$ . Notez que pour  $m = 1$ , la fonction est linéaire et que  $m$  augmente, plus la courbure ou la non-linéarité est introduite dans la fonction.



Tracé de la fonction  $f(x) = x^m$  pour  $m = 1, 2, 3$  et  $4$ . Notez que la fonction devient plus non linéaire lorsque  $m$  augmente.

$$\tilde{f}(x_{i+1}) = f(x_i) + mx_i^{m-1} \cdot h$$

Dans ce cas,  $x_i = 1$  si  $x_{i+1} = 2$

L'erreur absolue devient  $e = f(2) - \tilde{f}(2)$  pour chaque valeur de  $m$ .

Commenter l'effet de la valeur de la puissance  $m$  sur la taille de l'erreur d'approximation (l'effet des non-linéarités).

Dans l'algorithme d'approximation ci-dessus,  $m = 4$  est conservé et l'étape  $h$  est réduite de moitié. Calculez l'erreur associée à l'approximation de la fonction en  $x=2$ .

$$\tilde{f}(1.5) = f(1) + 4 \cdot 1^3 \cdot 0.5 = \dots$$

$$\tilde{f}(2) = f(1.5) + 4 \cdot 1.5^3 \cdot 0.5 = \dots$$

Commenter l'influence de la taille de l'étape de discrétisation sur l'erreur d'approximation.

Cela conduit à la conclusion que l'écart diminuera à mesure que  $h$  sera réduit. Aussi, à suffisamment petites valeurs de  $h$ , l'erreur devrait devenir proportionnelle à  $h^2$ . Autrement dit, comme  $h$  est

réduit de moitié, l'erreur sera divisée en quatre. Ainsi, nous concluons que l'erreur de l'approximation de la série de Taylor de premier ordre diminue lorsque  $m$  s'approche de 1 et que  $h$  diminue. Intuitivement, cela signifie que la série Taylor devient plus précise lorsque la fonction que nous approchons ressemble plus à une ligne droite sur l'intervalle d'intérêt.