INTÉGRATION NUMÉRIQUE

RÉSUMÉ DE LA THÉORIE ET DES APPLICATIONS

La règle du trapèze

L'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$ est approximée par l'intégrale de la fonction polynomiale de degré un $f_1(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_1(x)dx$$

Connaissant a et b et résolvant l'intégrale, sa valeur sera:

$$I \cong (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$

La méthode du trapèze

La méthode trapézoïdale consiste à diviser l'intervalle [a; b] en plusieurs intervalles de longueur égale et égale à $h = \frac{b-a}{n}$, où n est le nombre de sous-intervalles. L'intégrale est écrite comme une somme d'intégrales

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Chaque intégrale est approximée par la règle trapézoïdale

$$I = h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \ldots + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$

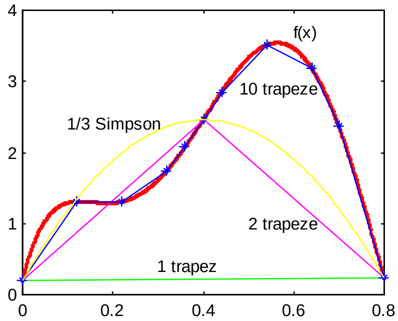
En regroupant les termes et en les substituant en h, la formule d'approximation est obtenue:

$$I \cong (b-a)\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}$$

Application.
Pour intégrer entre 0 et 0,8 la fonction:
$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ en utilisant

a) La règle trapézoïdale
b) La méthode trapézoïdale pour n=2,3,4

Dans chaque cas, calculez l'erreur relative $e_r = \frac{I_{exact} - I_{aprox}}{I_{exact}}$ et interpréter les résultats obtenus.



Devoirs en classe:

1. Intégrez, à l'aide de méthodes numériques, les intégrales suivantes:

$$\int_0^\infty e^{-y}\sin^2 y\,dy$$

$$\int_{-1}^\infty y e^{-y}\,dy$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+y^2)(1+\frac{y^2}{2})}\,dy$$

2. Intégrer la fonction $f(x) = e^{\text{tg}x}$ sur l'intervalle [10 60], en utilisant la règle de trapèze multiple à 5 segments

INTÉGRATION NUMÉRIQUE (2)

Règle Simpson 1/3

Cette méthode utilise la fonction polynomiale de degré 2 pour approximer l'intégrale:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_2(x)dx \quad \text{où } f_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

l'intervalle [a; b] est divisé en deux sous-intervalles de longueur h et l'intégrale aura la forme:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left[f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Si nous avons plusieurs sous-intervalles et sur chacun d'eux nous appliquons la règle 1/3 de Simpson l'intégrale aura la forme:

$$I \cong (b-a)\frac{f(x_0) + 4\sum\limits_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum\limits_{j=2,4,6}^{n-2} + f(x_n)}{3n}$$

où $h = \frac{b-a}{n}$ et n+1 est le nombre de points donnés (résultant en n/2 sous-intervalles)

Règle Simpson 3/8

Pour approximer l'intégrale, on utilise un polynôme de degré 3. Les points par lesquels passe le polynôme seront obtenus en divisant l'intervalle [a; b] en trois sous-intervalles de longueurs égales. L'intégrale sera:

$$I \cong \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

où x_0, x_1, x_2, x_3 sont les points qui délimitent à nouveau les sous-intervalles et $h = (b-a)/3$

Méthode d'intégration de Romberg

L'algorithme de la méthode de Romberg consiste en l'application successive de la règle trapézoïdale accompagnée de l'augmentation de la précision de l'approximation des intégrales par la méthode dite d'extrapolation de Richardson. Deux valeurs approximatives de l'intégrale d'une fonction sont utilisées pour déterminer une troisième approximation, avec une erreur de troncature plus petite.

$$I \cong \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1)$$

où $I(h_1)$ est l'intégrale approximative par la méthode trapézoïdale pour n_1 sous-intervalles de longueur $h_1 = \frac{b-a}{n_1}$, et $h_2 = \frac{h_1}{2}$.

En utilisant la même méthode de calcul, des approximations d'intégrales peuvent être établies avec une plus grande précision. Par exemple, si trois approximations de l'intégrale sont connues par la méthode trapézoïdale, correspondant aux étapes de discrétisation h_1, $h_2 = h_1/2$ et $h_3 = h_2/2$ et combiner avec l'équation ci-dessus les approximations correspondant aux pas h_1 şi h_2 puis celles correspondant aux étapes h_2 et h_3, deux approximations sont obtenues avec une meilleure précision que les approximations initiales (par la méthode du trapèze):

$$I_m \cong \frac{4}{3} I\left(h_2\right) - \frac{1}{3} I\left(h_1\right) \quad \text{şi} \quad I_M \cong \frac{4}{3} I\left(h_3\right) - \frac{1}{3} I\left(h_2\right)$$

Ensuite, la précision de l'approximation peut être augmentée en appliquant la formule d'extrapolation:

$$I \cong \frac{16}{15} I_M - \frac{1}{15} I_m$$

La formule générale d'extrapolation de Romberg est

$$I_k \cong \frac{4^{k-1} I_{M,k-1} - I_{m,k-1}}{4^{k-1} - 1} \text{ précision } O\left(2^{2k}\right).$$

Gauss quadrature. Formules de Gauss-Legendre.

Une intégrale définie de -1 à 1 dans f (x) peut être approximée en utilisant les valeurs de la fonction en deux ou trois points. Si deux points sont utilisés, alors:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \cong f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Si nous devons évaluer une intégrale de forme $I = \int_a^b F(X)\,dX$, un changement variable est effectué $X \to x$, et

$X(x) = \dfrac{(b+a)+(b-a)x}{2}$.

À ce stade, l'intégrale est approximée comme suit:

$$I = \int_a^b F(X)dX = \int_a^b F\left[X(x)\right]\frac{b-a}{2}dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx \cong f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Si trois points sont utilisés, alors la formule pour approximer l'intégrale est:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \cong 0,(5)f\left(-0,774596669\right) + 0,(8)f\left(0\right) + 0,(5)f\left(0,774596669\right)$$

Application

Intégrer entre 0 et 0,8 fonction

$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ en utilisant

a) La règle trapézoïdale
b) La méthode trapézoïdale pour n=2,3,4
c) La règle simple 1/3 de Simpson
d) Méthode de Romberg utilisant des intégrales calculées aux points a et b
e) Méthode de Gauss-Legendre à 2 points
f) Méthode de Gauss-Legendre à 3 points

Dans chaque cas, calculez l'erreur relative $e_r = \dfrac{I_{exact} - I_{aprox}}{I_{exact}}$ et interpréter les résultats obtenus.

Devoir

Calculez la valeur de l'intégrale ci-dessus en utilisant l'intégrale de Romberg et la formule de Gauss-Legendre de trois points.

Problèmes proposés

1. Utilisez l'intégration de Romberg pour évaluer:

$$\int_1^2 (x + \frac{1}{x})^2 dx$$

La valeur exacte de l'intégrale est I=4.8333

2. Pour intégrer en utilisant les formules de Gauss-Legendre à travers deux ou trois points:

$$\int_{-3}^{3} \frac{2}{1+2x^2} dx$$

MÉTHODES NUMÉRIQUES
Laboratoire 10

INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Définit la fonction à intégrer dans un fichier séparé fx.m

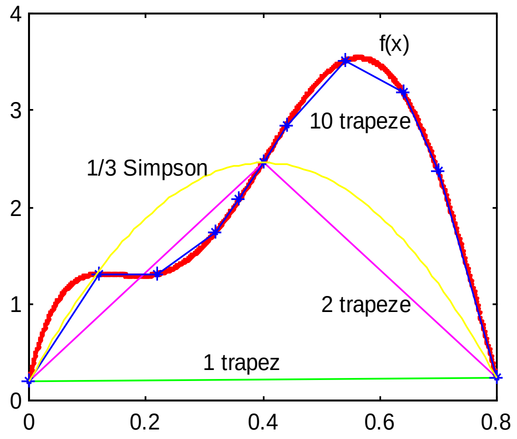
```
function y=fx(x)
y=0.2+25*x-200*x.^2+675*x.^3-900*x.^4+400*x.^5;
```

PROGRAMME PRINCIPAL

```
clear all
clf

global a b

a=0; b=0.8;
x=a:(b-a)/500:b;
y=fx(x);
plot(x,y,'r.')
text(0.6,3.7,'f(x)')
hold on
```




```
% la valeur exacte de l'intégrale
peut être vu avec la commande "quad":
e_adm=1e-6;                 % erreur admissible
Q=quad('fx',a,b,e_adm);     % utiliser la règle de Simpson

% Intégrer f(x) entre "a" et "b", en utilisant
% règle trapézoïdale simple

p=polyfit([a b], [fa fb],1);yp=polyval(p,[a b]);
plot([a b],yp,'g')
text(0.3,0.4,'1 trapèze')

disp(' Règle de trapèze simple')
fa=fx(a); fb=fx(b);
I1=(b-a)*(fa+fb)/2
erreur1=(Q-I1)/Q*100

% Intégrer f(x) entre "a" et "b", en utilisant
% double règle trapézoïdale

c=(a+b)/2;
fc=fx(c);
p=polyfit([a c], [fa fc],1);yp1=polyval(p,[a c]);
p=polyfit([c b], [fc fb],1);yp2=polyval(p,[c b]);
plot([a c],yp1,'m',[c b],yp2,'m')
text(0.5,1,'2 trapèze')

disp(' Règle de double trapèze')
I2=(b-a)*(fa+2*fc+fb)/4
erreur2=(Q-I2)/Q*100
```

```
% Intégrer f(x) entre "a" et "b", en utilisant
% règle trapézoïdale multiple à pas irrégulier

x3=[0 0.12 0.22 0.32 0.36 0.4 0.44 0.54 0.64 0.7 0.8];
y3=fx(x3);
plot(x3,y3,'b*',x3,y3,'b')
text(0.48,2.9,'10 trapèze')

disp(' Règle de trapèze multiple à pas irrégulier')
I3=trapz(x3,y3)
erreur3=(Q-I3)/Q*100
```