Scurtu Diana

1220B7

Examen

① Donnée :

$$3\frac{dy}{dx} + \sqrt{y} = e^{0,1x} \qquad y(0,3) = 5$$

et en utilisant une taille de pas de $h = 0,3$, la meilleure estimation de $y(0,9)$ en utilisant la méthode d'Euler est la plus proche.

$y(0,3) = 5$

$h = 0,3$

$y(0,9) = ?$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_n)$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$x_1 = x_0 + h = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$y(x_1) = y\left(\frac{3}{5}\right) = y_1 = y_0 + h + f(x_0, y_0) =$$

$$= 5 + hf\left(\frac{3}{10}, 5\right)$$

$$= 5 + \frac{3}{10} \cdot (-0,4018) =$$

$$= 4,879$$

$$x_2 = x_1 + h = \frac{3}{5}^{2)} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$$

$$y(x_2) = y\left(\frac{9}{10}\right) = y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 4,879 + h$$

$$f\left(\frac{3}{5}, 4,879\right) = 4,879 \cdot \frac{3}{10}(-0,382) = 4.764$$

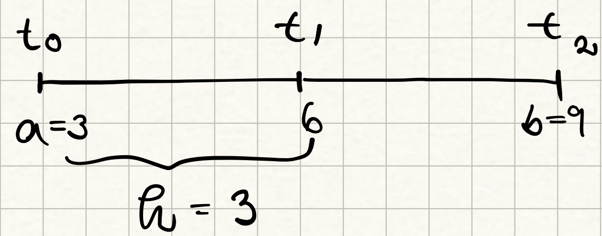
$$\Rightarrow \underbrace{y\left(\frac{9}{10}\right) = 4,764}$$ B

② La vitesse d'un corps est donnée par $v(t) = 4t^2+3$, où t est donné en secondes et v est donnée en m/s.

Utilisez la règle trapézoïdale à deux segments pour trouver la distance en mètres couverte par le corps de $t=3$ à $t=9$ secondes.

$$\begin{cases} v(t) = 4t^2+3 \quad , \quad [t]_{si} = s \quad , \quad [v]_{si} = m/s \\ a = 3 \\ b = 9 \\ n = 2 \end{cases}$$

$$h = \frac{t_2 - t_1}{n} = \frac{9-3}{2} = 3$$



$$I = \int_a^b v(t)\, dt$$

$$I = \frac{3}{2}\left[v(t_0) + 2 \cdot v(t_1) + v(t_2)\right]$$

$$\begin{cases} v(t_0) = v(3) = 4 \cdot 3^2+3 = 36+3 = 39 \\ v(t_1) = v(6) = 4 \cdot 6^2+3 = 4 \cdot 36+3 = 147 \\ v(t_2) = v(9) = 4 \cdot 9^2+3 = 4 \cdot 81+3 = 327 \end{cases}$$

$$I = \frac{3}{2}\left[39 + 2 \cdot 147 + 327\right] = \frac{3}{2}\left[39 + 294 + 327\right] = \frac{3}{2} \cdot 660 = 990$$

$$\underline{I = 990.00 \ m/s} \qquad A$$

③ La vitesse d'une fusée est donnée en fonction du temps comme

t[s]	0	0.5	1.2	1.5	1.8
v[m/s]	0	213	223	275	300

Autorisé à utiliser la différence finie progressive, différence finie centrée et différence finie rétrograde de la dérivée première, votre meilleure estimation de l'accélération $\left(a = \frac{dv}{dt}\right)$ de la fusée en m/s^2 à $t = 1,5\,s$

Différence finie centrée

$$a = \frac{dv}{dt} \quad , t = 1,5\,s$$

$$a(t) = \frac{v(t_1+1) - v(t_1-1)}{2 \cdot \Delta x}$$

$$\Delta x = 1,5 - 1,2 = 0,3$$

$$\Delta x = 1,8 - 1,5 = 0,3$$

$$a(1,5) = \frac{v(1,8) - v(1,2)}{2 \cdot \Delta x} = \frac{300 - 223}{2 \cdot 0,3} = \frac{77}{0,6} = 128,33$$ Ⓑ

④ La valeur $\int_{0,2}^{2} x e^{x} dx$ en utilisant la règle trapézoïdale (trapèze unique).

$$I = \int_{0,2}^{2} x e^{x} dx$$

$f(x) = xe^{x}$

$a = 0,2$

$b = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(a) = f(0,2) = 0,2 \cdot e^{0,2} = 0,244 \\ f(b) = f(2) = 2 \cdot e^{2} = 14,778 \end{cases}$$

$$I \simeq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = (2-0,2)\frac{0,244+14,778}{2} = 13,519$$

$$\underbrace{I \simeq 13,520}$$ C

⑤ La distance parcourue par une fusée de $t = 8$ à $t = 30$ est donnée par $I = \int_{8}^{30} 2000 \ln \frac{140\,000}{140\,000 - 2100t} - 9,8t \, dt$

Utilisez la règle 1/3 de Simpson pour trouver la valeur approx de I.

$$\begin{cases} f(t) = 2000 \ln \frac{140\,000}{140\,000 - 2100t} - 9,8t \\ a = 8 \\ b = 30 \\ I = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \frac{30-8}{6}\left[f(8) + 4f\left(\frac{30+8}{2}\right) + f(30)\right] =$$

$$\begin{cases} f(8) = 2000 \ln \dfrac{140\,000}{140\,000 - 2100 \cdot 8} - 9{,}8 \cdot 8 = 177{,}266 \\ f(19) = 2000 \ln \dfrac{140\,000}{140\,000 - 2100 \cdot 19} - 9{,}8 \cdot 19 = 484{,}745 \\ f(30) = 2000 \ln \dfrac{140\,000}{140\,000 - 2100 \cdot 30} - 9{,}8 \cdot 30 = 901{,}674 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{22}{6}\left(177{,}266 + 4 \cdot 484{,}745 + 901{,}674\right) = 11065{,}706$$

$\underbrace{I = 11065{,}72}$ C

(6) Un élève trouve la valeur numérique de :

$\frac{d}{dx}(e^x) = 20{,}220$, à $x=3$ en utilisant une taille de pas de 0.2.

Laquelle des méthodes suivantes l'élève a-t-il utilisée pour effectuer la différenciation ?

A) différence finie progressive :

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(3) = \frac{f(3{,}2) - f(3)}{0{,}2} = 22{,}235$$

B) Calcul exact :

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \Rightarrow f'(3) = e^3 = 20{,}086$$

C) Différence finie centrée :

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

$$f'(3) = \frac{f(3{,}2) - f(2{,}8)}{0{,}4} = 20{,}220$$

D) Différence finie rétrograde

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(3) = \frac{f(3) - f(2{,}8)}{0{,}2} = 18{,}204$$